

Banach 空间中的条件 (dc)

计东海, 刘颖, 佟欣欣

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 为了研究 Banach 空间中有界闭集满足 (dc) 的条件, 依据条件 (dc) 在 Banach 空间中低维有界闭集的完备化过程中的相关理论, 给出了有界闭集满足 (dc) 的一个必要条件和有界闭集满足 (dc) 的一个充分条件. 这一充分条件改进了 Papini 和吴森林给出的有界闭集满足 (dc) 的两个充分条件.

关键词: 超平面; 完备集; 完备化集

DOI: 10.15938/j.jhust.2016.01.024

中图分类号: O177 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2016)01-0118-05

The Condition (dc) in Banach Spaces

Ji Dong-hai, Liu Ying, Tong Xin-xin

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In order to study the conditions for bounded closed sets to satisfy the condition (dc) in Banach spaces, according to the related theories of the condition (dc) in the completion of lower dimensional bounded closed sets in Banach spaces, a necessary condition as well as a sufficient condition for (dc) is provided. The sufficient condition improves two sufficient conditions for (dc) obtained by Papini and Senlin Wu.

Keywords: hyperplane; complete sets; completion of sets

0 引言

令 X 是一个实 Banach 空间. 我们用 $B(x, \gamma) = \{y \in X: \|x - y\| \leq \gamma\}$ 表示以 x 为心, 以 γ 为半径的球, 其中 $x \in X, \gamma > 0$, 用 B 表示 X 中以原点为心, 以 1 为半径的单位球. 对 X 的任意至少包含两点的有界子集 K , 我们分别用 $\text{int}K$ 和 $\delta(K)$ 表示 K 的内部和直径. 若

$$x, y \in K, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in K$$

则称 K 是一个凸集. 若 K 是一个有界闭凸集且对任

意的单位泛函 $f \in X^*$, 其中 X^* 是 X 的共轭空间, 均有

$$w_f(K) = \sup\{f(x) : x \in K\} - \inf\{f(x) : x \in K\} = \delta(K)$$

则称 K 是一个等宽集(见文 [1-4]). 若

$$x \in X \setminus K \Rightarrow \delta(K \cup \{x\}) > \delta(K)$$

则称 K 是一个完备集(参见文 [5]). 若 K_0 是一个完备集, $K \subseteq K_0$ 且 $\delta(K) = \delta(K_0)$, 则称 K_0 是 K 的一个完备化集. 记

$$\eta(K) = \bigcap_{x \in K} B(x, \delta(K)), \theta(K) = \bigcap_{x \in \eta(K)} B(x, \delta(K)),$$

其中集合 $\eta(K)$ 恰为 K 的所有完全化集的并集, $\theta(K)$ 等于 K 的所有完全化集的交集(见文 [6] 和

收稿日期: 2015-04-08

基金项目: 国家自然科学基金(11171082).

作者简介: 计东海(1964—), 男, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: jidonghai@126.com;

刘颖(1990—), 女, 硕士研究生;

佟欣欣(1987—), 女, 硕士研究生.

[7]). 容易验证: K 是完备的当且仅当 $\eta(K) = K$; K 有唯一的完备化集当且仅当 $\delta(\eta(K)) = \delta(K)$. 令 H 是 X 的一个包含原点的闭超平面, H^+ 和 H^- 分别是由 H 确定的两个闭半空间, K 是 H 中至少包含两点的有界闭集. 记

$$\begin{aligned}\eta(K)^+ &= \eta(K) \cap H^+, \eta(K)^- = \eta(K) \cap H^-, \\ \theta(K)^+ &= \theta(K) \cap H^+, \theta(K)^- = \theta(K) \cap H^-, \\ K^a &= \eta(K)^+ \cup \theta(K)^-, K^b = \eta(K)^- \cup \theta(K)^+, \end{aligned}$$

令 K_1 是任意一个满足

$$K \subseteq K_1 \subseteq \eta(K)^- \quad (1)$$

的集合. 记

$$K_2 = \eta(K_1)^+, K_3 = \eta(K_2)^-, K^C = K_2 \cup K_3 \quad (2)$$

若 K 满足

$$\delta(\eta(K)^+) = \delta(K) = \delta(\eta(K)^-),$$

则称 K 满足条件(dc). 由文 [8] 可知, 下列条件等价:

- 1) K 满足条件(dc);
- 2) K^a 和 K^b 均是 K 的完备化集;
- 3) 若 K_1 满足式(1), 则由式(2)构造的 K^C 是 K 的一个完备化集.

至今, 我们仍未找到一个 K 满足(dc) 的充要条件. 在文 [8] 中, Papini 和吴森林得到了 K 满足(dc) 的两个充分条件: ① X 满足 $\varepsilon_0(X) \leq 1$ 且严格凸, K 是 H 中的一个等宽集; ② K 是 H 中的一个球.

本文将给出 K 满足(dc) 的一个必要条件和比①和②都弱的充分条件.

下面将用到如下事实: 若 $\varepsilon_0(X) \leq 1$, 则 X 是自反的. 从而对任意的闭凸集 $K \subseteq X$ 和任意的点 $x \in X$, x 在 K 中都存在唯一的最近点.

1 主要结论

记

$$\eta_H(K) = \bigcap_{x \in K} (B(x, \delta(K)) \cap H), \theta_H(K) = \bigcap_{x \in \eta_H(K)} (B(x, \delta(K)) \cap H)$$

定理 1 令 X 是一个 Banach 空间, H 是 X 的一个包含原点的闭超平面, K 是 H 中的一个至少包含两点的有界闭集. 若 K 满足如下条件:

$$\delta(\eta(K) \cap H) = \delta(K), \theta(K) \cap H = \theta_H(K), \quad (3)$$

$$\forall x, y \in \eta(K)^+ \setminus \eta(K)^-, \exists u \in S_X, \text{ s. t. ,}$$

$$\phi \neq (x + <-u, u>) \cap H,$$

$$(y + <-u, u>) \cap H \subseteq \eta(K) \cap H. \quad (4)$$

则 K 满足条件(dc).

证明: 因为 $\delta(\eta(K) \cap H) = \delta(K)$, 所以 K 在 H 中有唯一的完备化集, 记作 K_0 . 显然有

$$K_0 \subseteq \eta(K) \cap H,$$

假设存在 $x \in (\eta(K) \cap H) \setminus K_0$. 那么,

$\delta(K) = \delta(\eta(K) \cap H) \geq \delta(K_0 \cup \{x\}) > \delta(K_0) = \delta(K)$, 产生矛盾. 故 $K_0 = \eta(K) \cap H$. 任取 $x \in K_0$ 和 $y \in \eta_H(K) = K_0$, 我们有

$$\|x - y\| \leq \delta(K),$$

从而 $x \in \theta_H(K)$. 因此 $K_0 \subseteq \theta_H(K)$.

又因为

$$\begin{aligned}\theta_H(K) &= \bigcap_{x \in \eta_H(K)} (B(x, \delta(K)) \cap H) \subseteq \\ &(\bigcap_{x \in K} B(x, \delta(K))) \cap H = \\ &\eta(K) \cap H = K_0\end{aligned}$$

所以 $\theta_H(K) = K_0$. 令 x, y 是 $\eta(K)^+$ 中的任意两点. 那么, 存在

$$u \in S_X, \alpha(x), \alpha(y) \in R, x_H, y_H \in \eta(K) \cap H.$$

使得

$$x = \alpha(x)u + x_H, y = \alpha(y)u + y_H.$$

不妨设 $0 \leq \alpha(x) \leq \alpha(y)$. 若 $x_H = y_H$, 则

$$\|x - y\| = \alpha(y) - \alpha(x).$$

因为

$$y \in \eta(K)^+ = \eta(K) \cap H^+ \subseteq \eta(K).$$

$$y_H \in \eta(K) \cap H = \theta_H(K) = \theta(K) \cap H \subseteq \theta(K).$$

所以

$$\delta(K) \geq \|y - y_H\| = \alpha(y) \geq \alpha(y) - \alpha(x) = \|x - y\|.$$

若 $x_H \neq y_H$, 则

$$\|y - x\| = \|(\alpha(y) - \alpha(x))u + y_H - x_H\|,$$

因为 $\eta(K)^+$ 是凸集, 所以

$$(\alpha(y) - \alpha(x))u + y_H \in [y_H, y] \subseteq \eta(K)^+,$$

又因为

$$x_H \in \eta(K) \cap H = \theta_H(K) = \theta(K) \cap H \subseteq \theta(K),$$

所以 $\|x - y\| \leq \delta(K)$. 因此 $\delta(\eta(K)^+) \leq \delta(K)$. 因为 $K \subseteq \eta(K)^+$, 所以 $\delta(K) \leq \delta(\eta(K)^+)$. 综上所述可知 $\delta(K) = \delta(\eta(K)^+)$.

类似的, 我们可以证明: $\delta(K) = \delta(\eta(K)^-)$.

因此 K 满足(dc).

推论 1 令 X 是一个 Banach 空间, H 是 X 的一个包含原点的闭超平面, $K \subseteq H$ 是一个至少包含两点的有界闭集. 若 K 满足如下条件:

- 1) K 满足式(3);

2) 存在一点 $u \in S_X$, 使得 $H \perp_B u$ (见文 [9-17]),

则 K 满足 (dc).

证明: 任取点 $x \in \eta(K)$, 都存在 $\alpha(x) \in R$, $x_H \in H$ 使得 $x = \alpha(x)u + x_H$. 假设

$$x_H \notin \eta(K) \cap H,$$

那么, 存在一点 $z \in K$ 使得 $\|x_H - z\| > \delta(K)$. 从而 $\|x - z\| = \|\alpha(x)u + x_H - z\| \geq \|x_H - z\| > \delta(K)$, 这与 $x \in \eta(K)$ 矛盾. 故 $x_H \in \eta(K) \cap H$. 由定理 1 可知, K 满足 (dc).

定理 2 令 X 是一个 Banach 空间, H 是 X 的一个包含原点的闭超平面, $K \subseteq H$ 是一个至少包含两点的有界闭集. 若 K 满足 (dc), 则 K 满足式 (3).

证明: 因为

$$K \subseteq \eta(K) \cap H \subseteq \eta(K)^+,$$

且 K 满足 (dc), 所以 $\delta(\eta(K) \cap H) = \delta(K)$. 显然有 $\theta(K) \cap H \subseteq \theta_H(K)$,

假设存在

$$w \in \theta_H(K) \setminus (\theta(K) \cap H),$$

那么, 存在一点 $z \in \eta(K)$ 使得 $\|z - w\| > \delta(K)$. 因为

$$w \in \theta_H(K) = \left(\bigcap_{x \in \eta_H(K)} B(x, \delta(K)) \right) \cap H \subseteq \left(\bigcap_{x \in K} B(x, \delta(K)) \right) \cap H = \eta(K) \cap H,$$

所以

$$\max\{\delta(\eta(K)^+), \delta(\eta(K)^-)\} > \delta(K),$$

这与 K 满足 (dc) 矛盾. 故 $\theta(K) \cap H = \theta_H(K)$. 因此 K 满足式 (3).

定理 3 设 X 是一个严格凸的 Banach 空间, $\varepsilon_0(X) \leq 1$, H 是 X 的一个包含原点的闭超平面. 若 K 是 H 中的一个等宽集, 则 K 满足式 (3) 和式 (4).

证明: 因为 K 是 H 中的一个等宽集, 所以 K 是 H 中的一个完备集. 从而 $K = \eta(K) \cap H$.

又因为

$$\theta(K) \cap H \subseteq \eta(K) \cap H = K \subseteq \theta(K) \cap H,$$

所以

$$\eta(K) \cap H = K = \theta(K) \cap H,$$

因此

$$\begin{aligned} \theta_H(K) &= \bigcap_{x \in \eta_H(K)} (B(x, \delta(K)) \cap H) = \\ &= \left(\bigcap_{x \in K} B(x, \delta(K)) \right) \cap H = \\ &= \eta(K) \cap H = \theta(K) \cap H. \end{aligned}$$

设 x, y 是 $\eta(K)^+$ 中任意两点.

若 $x - y \in H$, 则由文 [8] 中的命题 5 可知, 存在两点 $s, t \in K$, 使得

$$t - s = \delta(K) \frac{x - y}{\|x - y\|}$$

又由文 [9] 的命题 7 和 X 是严格凸的, 有

$$\|x - y\| + \|s - t\| < \|x - s\| + \|y - t\| \leq 2\delta(K),$$

故 $\|x - y\| < \delta(K)$. 令 o 和 o' 分别为 $[x, y]$ 和 $[s, t]$

的中点, $u = \frac{o - o'}{\|o - o'\|}$,

$$x_H = o + \frac{1}{2} \|x - y\| \frac{t - s}{\|t - s\|}$$

$$y_H = o - \frac{1}{2} \|x - y\| \frac{t - s}{\|t - s\|}$$

那么,

$$x_H \in (x + \langle -u, u \rangle) \cap H$$

$$y_H \in (y + \langle -u, u \rangle) \cap H$$

$$x_H, y_H \in [x, y] \subseteq \eta(K) \cap H$$

若 $x - y \notin H$, 则我们不妨设射线 $[x, y]$ 与 H 交

于一点 z . 如果 $z \in K$, 取 $u = \frac{z - x}{\|z - x\|}$, 那么,

$$(x + \langle -u, u \rangle) \cap H = (y + \langle -u, u \rangle) \cap H = \{z\} \subseteq K \subseteq \eta(K) \cap H.$$

接下来证 $z \notin K$ 的情况. 因为 X 严格凸且自反, 所以 z 在 K 中存在唯一的最近点 u_0 (见文 [20]). 不难证明:

$$\text{int}(B(z, \|z - u_0\|)) \cap K = \emptyset.$$

由文 [20] 可知, 一定存在 $f \in S_{X^*}$ 使得

$$\begin{aligned} f(u_0) &\geq \inf\{f(w) : w \in B(z, \|z - u_0\|)\} \geq \\ &\sup\{f(w) : w \in K\} \geq f(u_0). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f(u_0) &= \sup\{f(w) : w \in K\} = \\ &= \inf\{f(w) : w \in B(z, \|z - u_0\|)\}. \end{aligned}$$

因为 X 是自反的且 K 是 X 的一个有界闭凸集, 则存在一点 $v_0 \in K$ 使得

$$f(v_0) = \inf\{f(w) : w \in K\}.$$

又因为 K 是 H 中的一个等宽集, 所以

$$\delta(K) \geq \|u_0 - v_0\| \geq f(u_0) - f(v_0) = \delta(K).$$

因此 $\|u_0 - v_0\| = \delta(K)$. 接下来我们证明 $u_0 \in [x, v_0]$. 令

$$s = \frac{z - u_0}{\|z - u_0\|}, \quad t = \frac{u_0 - v_0}{\|u_0 - v_0\|}$$

那么,

$$\begin{aligned} f(s) &= f\left(\frac{z - u_0}{\|z - u_0\|}\right) = \\ &= \frac{1}{\|z - u_0\|} (f(z) - f(u_0)) = \\ &= \frac{1}{\|z - u_0\|} (f(z) - \inf\{f(w) : w \in B(z, \|z - u_0\|)\}) = \\ &= \frac{1}{\|z - u_0\|} \sup\{f(z - w) : w \in B(z, \|z - u_0\|)\} = \end{aligned}$$

$$\sup \left\{ f \left(\frac{z-w}{\|z-w\|} \right) : \frac{z-w}{\|z-w\|} \in B \right\} = \|f\| = 1,$$

$$f(t) = \frac{f(u_0 - v_0)}{\|u_0 - v_0\|} = 1,$$

因为 X 是严格凸的, 所以 $s = t$. 因此, 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$u_0 - v_0 = \alpha(z - u_0),$$

从而

$$u_0 = \frac{1}{1+\alpha}v_0 + \frac{\alpha}{1+\alpha}z \in [v_0, z],$$

记

$$y + \langle u_0, v_0 \rangle \cap \eta(K)^+ = [s_1, s_2],$$

$$\frac{s_1 - s_2}{\|s_1 - s_2\|} = \frac{u_0 - v_0}{\|u_0 - v_0\|},$$

o 和 o' 分别为 $[u_0, v_0]$ 和 $[s_1, s_2]$ 的中点. 令

$$u = \frac{o' - o}{\|o' - o\|}, s'_1 = s_1 + o' - o, s'_2 = s_2 + o' - o,$$

那么,

$$\|s'_1 - o'\| = \|s'_2 - o'\| < \frac{1}{2}\delta(K),$$

故

$$s'_1, s'_2 \in [s'_1, s'_2] \subseteq [u_0, v_0] \subseteq \eta(K) \cap H,$$

如果 x 不在 $\langle s_1, s'_1 \rangle$ 和 $\langle s_2, s'_2 \rangle$ 之间. 令 s_3 为 x, s'_2 与 $\langle s_1, s_2 \rangle$ 的交点. 那么,

$$s_3 \notin [s_1, s_2],$$

因为 $\eta(K)$ 是凸集, 所以

$$s_3 \in [s_1, s'_2] \subseteq \eta(K),$$

但是

$$s_3 \in \langle s_1, s_2 \rangle \cap \eta(K) = [s_1, s_2],$$

产生矛盾. 从而 x 一定位于 $\langle s_1, s'_1 \rangle$ 和 $\langle s_2, s'_2 \rangle$ 之间. 因此

$$(x + \langle -u, u \rangle) \cap H \subseteq [s'_1, s'_2] \subseteq \eta(K) \cap H,$$

类似的, 我们可以证明: $\forall x, y \in \eta(K)^-, \exists u \in$

S_X , s. t.

$$\phi \neq (x + \langle -u, u \rangle) \cap H, (y + \langle -u, u \rangle) \cap H \subseteq \eta(K) \cap H.$$

故 K 满足式(3)和式(4).

定理 4 令 X 是一个 Banach 空间, H 是 X 的一个包含原点的闭超平面. 若 K 是 H 中的一个球, 则 K 满足式(3)和式(4).

证明: 因为 K 是 H 中的一个球, 所以 K 是 H 中的一个完备集. 接下来 K 满足(3)式的证明过程类似于定理 3 中 K 满足(3)式的证明过程. 记 K 的球心为 p , 半径为 γ . 设 x, y 是 $\eta(K)^+$ 中的任意两点.

若 $x - y \in H$, 令

$$t = p + \gamma \frac{x - y}{\|x - y\|}, s = p - \gamma \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

那么,

$$t, s \in K, t - s = \delta(K) \frac{x - y}{\|x - y\|},$$

从而

$$\|x - y\| + \|t - s\| \leq \|x - s\| + \|y - t\| \leq 2\delta(K),$$

故

$$\|x - y\| \leq \delta(K),$$

令 o 为 $[x, y]$ 的中点,

$$u = \frac{p - o}{\|p - o\|}, x_H = p + \frac{1}{2}\|x - y\| \frac{t - s}{\|t - s\|},$$

$$y_H = p - \frac{1}{2}\|x - y\| \frac{t - s}{\|t - s\|}.$$

那么,

$$x_H \in (x + \langle -u, u \rangle) \cap H, y_H \in (y + \langle -u, u \rangle) \cap H,$$

从而

$$x_H, y_H \in [x_H, y_H] \subseteq \eta(K) \cap H,$$

若 $x - y \notin H$. 则我们不妨设射线 $[x, y]$ 与 H 交于点 z . 如果 $z \in K$, 取

$$u = \frac{z - x}{\|z - x\|},$$

那么,

$$(x + \langle -u, u \rangle) \cap H = (y + \langle -u, u \rangle) \cap H = \{z\} \subseteq K \subseteq \eta(K) \cap H.$$

接下来我们证 $z \notin K$ 的情况. 令

$$u_0 = p + \gamma \frac{z - p}{\|z - p\|}, u_0 = p - \gamma \frac{z - p}{\|z - p\|}.$$

$$y + \langle u_0, v_0 \rangle \cap \eta(K)^+ = [s_1, s_2],$$

$$\frac{s_1 - s_2}{\|s_1 - s_2\|} = \frac{u_0 - v_0}{\|u_0 - v_0\|}.$$

o 为 $[s_1, s_2]$ 的中点,

$$u = \frac{p - o}{\|p - o\|}, s'_1 = s_1 + p - o, s'_2 = s_2 + p - o.$$

那么,

$$u_0, v_0 \in K, \|s'_1 - p\| = \|s'_2 - p\| \leq \gamma,$$

因此

$$s'_1, s'_2 \in [s'_1, s'_2] \subseteq [u_0, v_0] \subseteq \eta(K) \cap H,$$

类似于定理 3 中的证明过程, 有

$$(x + \langle -u, u \rangle) \cap H \subseteq [s'_1, s'_2] \subseteq \eta(K) \cap H.$$

类似的, 我们可以证明: $\forall x, y \in \eta(K)^-, \exists u \in$

S_X , s. t.

$$\phi \neq (x + \langle -u, u \rangle) \cap H,$$

$$(y + \langle -u, u \rangle) \cap H \subseteq \eta(K) \cap H.$$

故 K 满足式(3)和式(4).

参考文献:

- [1] POLOVINKIN E S. Convex Bodies of Contant Width [J]. Dokl. Math., 2004, 70: 560 – 562.
- [2] HOWARD R. Convex Bodies of Constant Width and Constant Brightness [J]. Adv. Math., 2006, 204: 241 – 261.
- [3] VRECICA S. A Note on Sets of Constant Width [J]. Nouvelle série. Tome., 1981, 43(29): 289 – 291.
- [4] LACHAND – ROBERT T, OUDET É. Bodies of Constant Width in Arbitrary Dimension [J]. Math. Nachr., 2007, 280(7): 740 – 750.
- [5] MALUTA E, PAPINI P L. Diametrically Complete Sets and Normal Structure [J]. J. Math. Anal. Appl., 2015, 424: 1335 – 1347.
- [6] MORENO J P. Porosity and Unique Completion in Strictly Convex Spaces [J]. Math. Z., 2011, 267: 173 – 184.
- [7] POLOVINKIN E S, SIDENKO S V. The Addition of Subsets to Constant Width Bodies, Physics and Mathematics [J]. Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz. – Mat. Nauki., 2006, 148(2): 132 – 143.
- [8] 吴森林, 计东海. 正交性和内积空间的一些特征 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2004, 9(6): 113 – 115.
- [9] JI DONGHAI, WU SENLIN. Quantitative Characterization of the Difference between Birkhoff Orthogonality and Isosceles Orthogonality [J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 323(1): 1 – 7.
- [10] JAMES R C. Orthogonality in Normed Linear Spaces [J]. Duke Math. J., 1945, 12(2): 291 – 302.
- [11] ALONSO J, MARTINI H, WU SENLIN. On Birkhoff Orthogonality and Isosceles Orthogonality in Normed Linear Spaces [J]. Aequationes Math., 2012, 83: 153 – 189.
- [12] ALONSO J, BENÍTEZ C. Orthogonality in Normed Linear Spaces: a survey, II, Relations between Main Orthogonalities [J]. Extracta Math., 1989, 4(3): 121 – 131.
- [13] JAMES R C. Orthogonality and Linear Functionals in Normed Linear Spaces [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1947, 61: 265 – 292.
- [14] 计东海, 陶冶. 度量椭圆与欧氏平面的一个特征性质 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17(5): 84 – 86.
- [15] 倪柏竹, 何婵, 计东海. 一致非方空间的新特征性质 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2011, 16(1): 107 – 109.
- [16] ROBERTS B D. On the Geometry of Abstract Vector Spaces [J]. Tohoku Math. J., 1934, 39: 42 – 59.
- [17] MARTINI H, SWANEPOEL K J, WEIB G. The Geometry of Minkowski Spaces—a Survey. Part I [J]. Expo. Math., 2001, 19(2): 97 – 142.
- [18] 定光桂. 巴拿赫空间引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008: 160 – 161.

(编辑: 王 萍)

(上接第 117 页)

- [6] SANTANU DUTTA. Estimation of the MISE and the Optimal Bandwidth Vector of a Product Kernel Density Estimate [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2010, 141(5): 1817 – 1831.
- [7] 叶菲. 改进核密度估计确定最优分组方法研究 [J]. 计算机应用与软件, 2013, 6: 292 – 294.
- [8] 宇世航, 赵世舜. 核实数据下的递归核密度估计 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2012, 50(5): 924 – 930.
- [9] 张敏爱, 李路亮, 张晓琴. 基于核密度估计的实验室能力验证 [J]. 中北大学学报: 自然科学版, 2013, 34(5): 586 – 589.
- [10] SANTANU DUTTA. Estimation of the MISE and the Optimal Bandwidth Vector of a Product Kernel Density Estimate [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2010, 141(5): 1817 – 1831.
- [11] 尹训福, 郝志峰, 杨晓峰. 快速核密度估计算法研究进展 [J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(31): 1 – 4.
- [12] 任文军, 宋向东. 核密度估计中的递归方法选择窗宽及其应用 [J]. 长春大学学报, 2009, 19(1): 23 – 26.
- [13] 黎运发, 黄明辉. 核密度估计逐点最优窗宽选择的改进 [J]. 统计与决策, 2009, 30(2): 231 – 235.
- [14] WANG SHITONG, WANG JUN. Kernel Density Estimation, Kernel Methods and Fast Learning in Large Data Sets [J]. IEEE transactions on cybernetics, 2013, 4(2): 43 – 44.
- [15] JOHAN LIM, MIN CHEN, SANGUN PARK, et. al. Kernel Density Estimator From Ranked Set Samples [J]. Communications in Statistics—Theory and Methods, 2014, 43(12): 2156 – 2168.
- [16] 于传强, 郭晓松. 基于估计点的滑动窗宽核密度估计算法 [J]. 兵工学报, 2009, 30(2): 231 – 235.
- [17] 邓飏, 于传强. 基于估计点双窗宽核密度估计算法 [J]. 仪器仪表学报, 2006, 32(3): 31 – 33.
- [18] 田玉刚, 杜渊会, 何义丰. 变窗宽核加权估计下的变形趋势拟合方法 [J]. 测绘科学技术学报, 2012, 29(1): 12 – 15.
- [19] DAI PEHNGJIE, SUN ZHIHUA, WANG PENG. Model Checking for General Linear Error-in-Covariates Model with Validation Data [J]. Acta Mathematica Sinica, 2010, 23(6): 1153 – 1166.
- [20] 乔俊锋, 朱虹, 史静. 一种快速核密度估计背景建模方法 [J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(5): 192 – 193.

(编辑: 关 毅)